Physicité

IPhO : Thermodynamique (exercices)

1 Capacité thermique

Exercice 1 : Barre d'acier (Test de présélection 2025)

On plonge une barre d'acier de 600g chauffée dans un calorimètre contenant 0,5 L d'eau à température ambiante ($\theta_{amb} = 25°C$). On considère que l'ensemble forme un système isolé et on néglige les transferts thermiques sur les parois. Les capacités thermiques massiques entrant en jeu sont $c_{eau} = 4185 J.kg^{-1}.K^{-1}$ et $c_{acier} = 440 J.kg^{-1}.K^{-1}$. Quelle est la température minimale de l'acier pour amener l'eau à ébullition ?

1. $109°C$
2. $494°C$
3. $594°C$
4. $694°C$

Exercice 2 : Boisson fraîche (Test de présélection 2024)

Combien de glaçons sont nécessaires pour refroidir à $10°C$ un litre de jus de fruit initialement à $30°C$ qui sera assimilé à de l'eau liquide de capacité thermique $c_{eau} = 4,2 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$? On considère que les glaçons sont initialement à $0°C$ et que lorsqu'ils fondent se transforment en eau liquide et absorbent $q = 330 kJ.kg^{-1}$. On supposera que les glaçons sont de volume identique $V = 10 cm^3$ et de masse volumique $\rho_g = 931 kg.m^{-3}$. On néglige les échanges thermiques du jus de fruit avec son environnement.

1. 24
2. 32
3. 21
4. 27

Exercice 3 : À la douche

Un fidèle spectateur de PhysiCité prend une douche à $35°C$. Les arrivées d'eau chaude et d'eau froide sont respectivement à $\theta_c = 60°C$ et $\theta_f = 10°C$. Déterminer le rapport entre les débits.

2 Premier principe de la thermodynamique

Exercice 4 : Chute d'Iguazu

On considère une goutte d'eau initialement au sommet de la Garganta del Diablo qui s'écrase sur un caillou au pied des chutes. A l'aide du premier principe de la thermodynamique, déterminer si la température de la goutte d'eau varie entre l'état initial et le moment où elle est au pied de la cascade.

— Altitude : 81 m

— Capacité thermique massique de l'eau : $c = 4,18kJ/kg/K$

— Intensité de la pesanteur $g = 9,81N/kg$

Exercice 5 : Frottement des mains

L'hiver, on se frotte les mains pour se réchauffer. On suppose que la puissance de frottement est intégralement transmise à l'épiderme. Si l'on considère l'épiderme comme un système fermé, déterminer l'élévation de température lorsque l'on frotte ses mains pendant 60s.

— Epaisseur de l'épiderme au niveau de la main $e = 1mm$

— Surface de la paume de la main : $S = 150cm^2$

— Masse volumique de l'épiderme : $\rho = 1,0.10^3 kg/m^3$

— Capacité thermique massique de l'épiderme $c = 4,18kK/kg/K$

— Puissance de frottement : $P = 20W$

Exercice 6 : Whisky "on the rocks"

Pour rafraîchir un whisky, on peut utiliser des glaçons, mais en se réchauffant ils fondent, diluant la boisson. On utilise donc un cube de granite de côté a, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c à la place. On l'a laissé se réchauffer à température ambiante $T_0 = 15°C$. On le place ensuite dans un congélateur à $T_1 = -4°C$. On néglige tous les effets autres que les transferts conducto-convectifs, et on note h le coefficient de transfert conducto-convectif. On s'intéresse à la dynamique temporelle de la température T du bloc (qu'on suppose uniforme).

1. On se place entre t et $t + dt$. Calculer la variation de l'énergie interne du bloc dU en fonction de c, ρ, a et $dT = T(t + dt) - T(t)$.
2. Exprimer dU en fonction de h, a, T, T_1 et dt.
3. En déduire que T vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

   Préciser les expressions de τ et T_∞.
4. Résoudre cette équation dans le cas étudié.

Exercice 7 : L'effet de serre (adapté des IPhO 2024)

Nous introduisons un modèle simple dans lequel l'atmosphère terrestre est représentée par une fine couche située à une faible distance au-dessus de la surface de la Terre, de sorte que la différence entre l'aire de la couche atmosphérique et celle de la surface terrestre peut être négligée. Dans ce qui suit, on suppose que la majeure partie du rayonnement thermique provenant de la Terre et du Soleil est émise à des longueurs d'onde proches de leur $\lambda_{\max}$ respectif. On suppose également que la "couche atmosphérique" réfléchit une fraction $r_A = 0{,}255$ du rayonnement visible-ultraviolet incident, qu'il vienne d'en haut ou d'en bas, et qu'elle transmet entièrement le reste.
On suppose en outre que l'atmosphère ne réfléchit aucune partie du rayonnement infrarouge ; cependant, elle en absorbe une fraction ε et transmet le reste. Ce comportement, connu sous le nom d'effet de serre, modifie la température moyenne de la Terre.
La surface terrestre, quant à elle, réfléchit une fraction r_E du rayonnement visible–ultraviolet, et absorbe le reste de ce rayonnement ainsi que l'ensemble du rayonnement infrarouge. Le rayonnement d'un corps noir est donné par la loi de Stefan Boltzmann :

$$U(T) = \sigma T^4$$

où $\sigma = 5,67.10^{-8} W/m^2/K^4$. Le Soleil émet une puissance surfacique S_0 au niveau de la Terre, sur une surface normale. La température de surface du Soleil est $T_S = 5,77.10^3 K$. La distance Terre-Soleil vaut $d = 1,5.10^{11} m$.

1. Déterminer S_0.
2. En tenant compte de la géométrie, déterminer la puissance surfacique effectivement reçue par la Terre en terme de fraction de S_0.
3. En prenant $\varepsilon = 1$ et $r_E = 0$, calculer la température de la Terre et la température de l'atmosphère.

Maintenant, on considère $r_E \neq 0$, $r_E = 0,102$. Dans ce cas, le système Terre-atmosphère reflète une fraction différente de la radiation solaire nommée albedo et notée α.

4. Déterminer numériquement la valeur de l'albedo.
5. Déterminer la température de la Terre en fonction de σ, α, S_0 et ε.
6. Exprimer $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$ et déterminer de combien la température de la Terre augmente si ε augmente d'un pourcent.

On considère à présent $T_A = 245K$ et $T_E = 288K$. On ajoute un flux thermique $J = k(T_E - T_A)$ de la Terre vers ll'atmosphère. Cette quantité est la puissance surfacique transmise.

7. Calculer ε, T_E, T_A, σ, α et S_0.
8. Dériver les équations de la questions précédente par rapport à ε et déterminer deux équations satisfaites par $\frac{dT_A}{d\varepsilon}$ et $\frac{dT_E}{d\varepsilon}$.

Indices : Une somme géométrique infinie (appelée série) s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Exercice 8 : Température du Soleil sans réaction thermonucléaire

Dans cet exercice, on va montrer que l'énergie du Soleil ne peut pas provenir uniquement de l'énergie gravitationnelle qu'il a accumulé en s'effondrant. On va raisonner par ordres de grandeur.

Admettons que l'énergie potentielle V associée à l'interaction gravitationnelle est reliée à la force par :

$$-\frac{dV}{dr} = F(r)$$

1. En déduire qu'à une constante près (qu'on prendra nulle),

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

2. En déduire que la variation d'énergie potentielle gravitationnelle de gaz lors de son effondrement est de l'ordre de

$$\Delta E_p = -\frac{GM_S^2}{R_S}$$

3. Discuter le signe (est-ce cohérent avec le caractère attractif de l'interaction gravitationnelle ?).
4. On suppose que cette énergie est intégralement dissipée sous forme de chaleur. Ensuite, on suppose que le Soleil a aujourd'hui une température uniforme (ce qui est bien sûr faux...) et avait une température nulle avant son effondrement. Montrer que la variation d'énergie interne du gaz vaut :

$$\Delta U = CM_S\Delta T$$

5. En déduire la température du Soleil.
6. En réaliser une application numérique, en prenant comme C celui typique du gaz d'hydrogène, $C \approx \frac{R}{M_H}$ (où M_H est la masse molaire de l'hydrogène).
7. Comparer à la température estimée à l'intérieur du Soleil, de 15 millions de degrés. Commenter. On rappelle que le Soleil a environ 4.5 milliards d'années, et qu'il en est à peu près à la moitié de sa vie.

Exercice 9 : L'éruption du volcan Mérapi (adapté de l'épreuve des IPhO 2017)

Dans ce problème, nous cherchons à comprendre les causes de la plus grande éruption du Mérapi en 2010. Les géophysiciens savent que l'effet de l'eau (extérieure ua volcan) sur le magma joue un rôle important dans le comportement explosif des éruptions volcaniques. Supposons que le volcan considéré ici est un système composé d'un mélange de particules magmatiques et d'eau. La cheminée du volcan et l'atmosphère représentent les limites du système. On peut considérer qu'une éruption explosive se déroule en deux phases. Une interaction magma-eau instantanée et une expansion du système. Dans la première phase, une masse m_m de magma de température T_m est mélangée à une masse m_w d'eau d'origine extérieure de température T_w. L'équilibre thermique est atteint pratiquement instantanément. On peut considérer cette interaction comme un processus à volume quasi constante (isochore). L'enthalpie de vaporisation de l'eau de même que l'enthalpie de fusion du magma peuvent être négligée.

1. Déterminer la température d'équilibre à la fin de la première phase en fonction des masses de l'eau et du magma ainsi que des capacités thermiques de l'eau C_{vw} et C_{vm} du magma.
2. Déterminer la pression à l'équilibre à la fin de la première phase en supposant que le mélange eau-magma peut être considéré comme un gaz parfait. On notera v_e le volume molaire du mélange.

L'expansion du système (seconde phase) peut être provoquée de différentes manières, l'une d'entre-elles étant une détonation thermique. Bien qu'un tel processus soit plutôt compliqué, nous pouvons cependant mesurer de façon empirique la vitesse relative du mélange éjecté lors de l'éruption. La vitesse d'un gaz lors de l'éruption dépend de la pression p, de la masse totale m et du volume V du mélange dans la cheminée du volcan.

3. Exprimer la vitesse du gaz durant l'éruption en fonction de p, V et m à une constante multiplicative près.

3 Gaz parfait

Exercice 10 : Equilibre d'une montgolfière

Une montgolfière est immobile dans l'atmosphère. Déterminer la température de l'air à l'intérieur de l'enveloppe. On considère que l'air se comporte comme un gaz parfait.

— Masse de l'ensemble $m_{tot} = 500kg$

— Volume de l'enveloppe $V = 2000m^3$

— Conditions ambiantes : $p_0 = 1,013bar$ et $\theta_0 = 12,0°C$

— Masse molaire de l'air $M = 29,0g/mol$

— Constante des gaz parfaits $R = 8,314J/K/mol$

Exercice 11 : Equation d'état des gaz non parfaits (adapté des IPhO 2014)

Dans le modèle bien connu du gaz parfaits, les effets physiques décrits ci-après sont négligeables. Les atomes du gaz réel ont un volume non négligeable et ils interagissent entre eux. Dans le problème, on considère une seule mole d'eau.

Equation d'état d'un gaz non idéal

Compte-tenu de la taille non négligeable des atomes, l'équation d'état d'un gaz prend la forme $P(V-b) = RT$, avec V le volume molaire.

1. Estimer b en fonction du diamètre atomique.

En prenant en compte, les forces intermoléculaires, Van der Waals a proposé l'équation d'état suivante, qui décrit les états gazeux et liquides de la matière :

$$(P + \frac{a}{V^2})(V-b) = RT$$

Propriétés d'un mélange gaz-liquide

Cette partie concerne les propriéts de l'eau dans un mélange gaz/liquide à la température de $100°C$. La pression de vapeur saturante, pression du gaz à l'équilibre avec la phase liquide, à cette température est connue pour être égale à $P_0 = 1,0.10^5 Pa$. La masse molaire de l'eau est $\mu = 1,8.10^{-2} kg/mol$ et $a = 0,56 m^6.Pa.mol^{-2}$. Dans l'état gazeux, on suppose $V_G \gg b$.

2. Déduire de cette approximation l'expression du volume du gaz et l'exprimer en fonction de R, T, P_0 et a.
3. En utilisant le modèle du gaz parfait un volume V_{G0} peut être évalué. Calculer numériquement en pourcentage la diminution relative du volume du gaz, due aux interactions.

Dans l'approximation du modèle de Van der Waals décrivant l'eau liquide, il est raisonnable de supposer que l'inégalité suivant est vérifiée $\frac{a}{V^2} \gg P$.

4. Donner l'expression du volume d'eau liquide V_L en fonction de a, b, R et T.

En supposant que $bRT \ll a$, on peut estimer les grandeurs ci-dessous pour l'eau. On rappelle l'approximation : $(1+x)^\alpha \underset{|x| \ll 1}{\approx} 1 + \alpha x$.

5. Exprimer la masse volumique de l'eau liquide ρ_L.
6. Exprimer le coefficient de dilation thermique $\alpha = \frac{1}{V}\frac{\Delta V_L}{\Delta T}$

Exercice 12 : Démonstration de l'équation d'état du gaz parfait

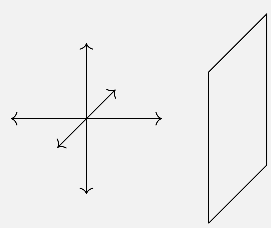
On cherche à démontrer l'équation d'état du gaz parfait :

$$PV = nRT$$

Avec N le nombre de molécules et k_B la constante de Boltzmann. On se place dans un cas simplifié. La pression du gaz est due aux chocs des molécules sur la paroi. On suppose qu'elles rebondissent parfaitement lors d'un tel choc, et repartent avec la même énergie. On note de plus m la masse de chaque molécule.

On suppose de plus (considérer les angles complique beaucoup le problème) que toutes les molécules vont (cf figure) :

1. À la même vitesse, v_0.
2. Dans seulement trois directions de l'espace, dans les deux sens possibles. Il y a de plus autant de molécules dans ces six orientations possibles.



De plus, la température vérifie, en vertu du théorème d'équipartition de l'énergie,

$$\frac{3}{2}k_BT = < E_c >$$

$<>$ signifiant la moyenne statistique, et E_c étant l'énergie cinétique microscopique d'une molécule.

1. Calculer v_0 en fonction de la température.
2. On considère les particules qui entrent en collision avec la paroi, de surface S, entre t et $t + dt$. Dessiner le volume qui les contient.
3. En déduire que le nombre de particules qui entrent en collision avec la paroi pendant dt est :
$$\frac{1}{6}\frac{NSv_0dt}{V}$$
4. La force subie par la paroi est la dérivée temporelle de la quantité de mouvement, $p = mv$. Pour calculer la force, il faut donc calculer la variation de quantité de mouvement de l'ensemble des particules qui entrent en collision avec la paroi pendant dt entre avant et après le choc, puis diviser le résultat obtenu par dt. Montrer que cette force vaut :
$$2mv_0\frac{1}{6}\frac{NSv_0}{V}$$
5. Conclure que, en définissant $R = \mathcal{N}_A k_B$, on a :

$$PV = Nk_BT = nRT$$

Exercice 13 : Gaz de photons

On considère un gaz de photons. On les suppose tous à la même longueur d'onde λ, et on suppose que les parois de l'enceinte sont parfaitement réfléchissantes. On adopte les mêmes hypothèses que dans l'exercice précédent, c'est-à-dire qu'on suppose le gaz homocinétique (une seule vitesse possible, ce qui est vrai pour les photons) et hexadirectionnel (les photons ne peuvent se déplacer que dans 6 directions). En s'inspirant de l'exercice précédent, établir l'équation d'état du gaz de photons :

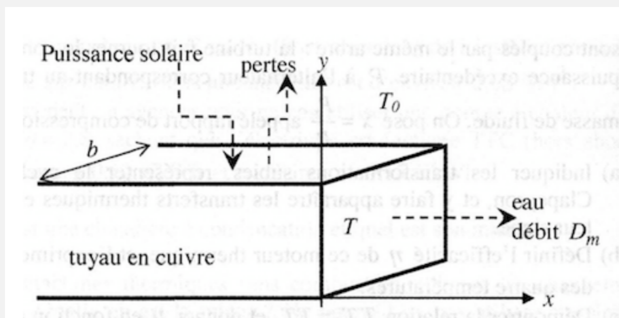
$$P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

4 Transferts thermiques

Exercice 14 : Chauffe-eau solaire

Un chauffe-eau solaire de toit à utilisation domestique est modélisé par un tuyau d'axe Ox à section rectangulaire en cuivre de largeur b peint en noir (pour absorber le rayonnement) reposant sur sa face inférieure sur un isolant thermique et exposé au soleil par sa face supérieure. Les faces latérales verticales sont également calorifugées et ne reçoivent aucun rayonnement. Le tuyau est parcouru par un courant d'eau permanent dans la direction de l'axe x et de débit massique D_m. La capacité thermique de l'eau est $c_p = 4,2 \mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

La lumière solaire est entièrement absorbée par le tuyau. L'éclairement du tuyau (puissance solaire reçue par unité de surface de tuyau) est notée E. On étudie le régime permanent d'écoulement une fois celui-ci établi. Le régime transitoire de montée en température n'est pas abordé : la température ne dépend donc pas du temps. On supposera que $T = T(x)$.



Le cuivre étant un excellent conducteur thermique, on peut supposer que tout le métal, y compris sa face noircie est à la même température $T(x)$ que l'eau dans le tuyau à la même abscisse x. Les seuls transferts thermiques envisagés se font selon y (pas de diffusion thermique dans le sens x de la convection, ni dans l'eau ni dans le cuivre). Si l'air extérieur à la température T_0 est plus froid que le tuyau, il y a inévitablement des pertes thermiques vers l'atmosphère (ou un gain si l'air extérieur est plus chaud).

1. Préciser l'origine physique de ces pertes, et justifier qu'elles peuvent s'écrire par unité de longueur sous la forme $dP_{pertes} = \alpha b(T - T_0)dx$ où α est une constante dont l'expression n'est pas demandée.
2. Appliquer le premier principe en régime stationnaire à l'eau contenue entre les abscisses x et $x + dx$. On posera $\theta(x) = T(x) - T_0$. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(x)$?
3. Résoudre cette équation en supposant que l'eau entre en $x = 0$ à la température T_1. On fera apparaître une dimension L caractéristique du problème. Le débit massique étant imposé par le cahier des charges, quelle longueur faut-il choisir pour optimiser le dispositif ? Pourquoi est-il préférable de placer l'ensemble sous une vitre transparente ?

Exercice 15 : Équation de la chaleur

Dans tout l'exercice, on utilisera les dérivées partielles. Si f est une fonction de x et de y, la dérivée partielle de f par rapport à x est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx}$. Pour calculer une dérivée partielle, on fait un calcul habituel de dérivée par rapport à x en considérant que y est fixé. Par exemple, si $f(x,y) = x^3y - y^2 + \frac{x}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 2y - \frac{x}{y^2}$.

On peut ensuite faire des dérivées secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+dx,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{dx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+dy) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{dy}$. Pour la fonction donnée en exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy$

On considère une barre, de section S dont la température est notée $T(x,t)$: elle dépend à la fois de la position x et du temps t. On veut établir une équation sur T.

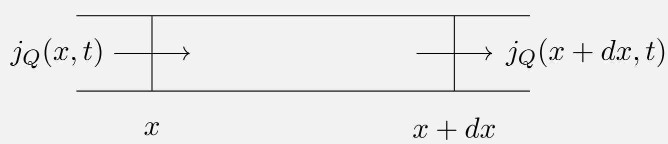
On considère une "coupe" de la barre en x. On suppose que le flux de transfert thermique, c'est-à-dire la puissance transmise par unité de surface, de la partie gauche de la barre vers la partie droite, s'écrit

$$j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$$

C'est la loi de Fourier. $\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$ désigne la dérivée de T par rapport à x, à t fixé.

1. Discuter du signe devant la dérivée partielle. Qu'est-ce que cela veut dire vis-à-vis du flux d'énergie ?

   On considère le système fermé suivant : la partie de la barre située entre les abscisses x et $x + dx$ (cf figure 4). On effectue un bilan d'énergie entre les dates t et $t + dt$, avec dx et dt infiniment petits.



2. Montrer que le premier principe s'écrit :

$$dU(x,t+dt) - dU(x,t) = S(j_Q(x,t) - j_Q(x+dx,t))dt$$

   avec dU l'énergie interne du système.

3. Calculer dU en fonction de c la capacité thermique massique du système, ρ sa masse volumique, T sa température, dx et S.
4. En notant $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}$, montrer l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

5. On pose $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ le coefficient de diffusion. Donner, en fonction de D, une longueur typique sur laquelle se sera propagée l'énergie en un temps t.
6. Montrer que les solutions, si un état stationnaire est atteint, sont des fonctions affines de x.
7. On suppose que notre barre est connectée à gauche (en $x = 0$) à un thermostat (un réservoir qui impose à la barre sa température) à la température T_1, et à droite (en $x = L$) à un thermostat à la température T_2. Calculer $T(x)$ dans l'état stationnaire.

Exercice 16 : Cuire un œuf dur (IPhOs 2006)

Un œuf, sorti directement du réfrigérateur à la température $T_0 = 4°C$, est plongé dans une casserole d'eau bouillante à la température T_1.

1. Quelle est la quantité d'énergie U requise pour coaguler tout l'intérieur de l'œuf ?
2. Quelle est la valeur du flux de transfert thermique j qui s'écoule dans l'œuf ?
3. Quelle est la puissance thermique P transmise à l'œuf ?
4. Pendant combien de temps devriez-vous cuire l'œuf afin qu'il devienne dur ?

Indications : j est défini comme dans l'exercice précédent, la puissance transmise par unité de surface, de l'extérieur vers l'intérieur, il s'exprime en $\mathrm{W\,m^{-2}}$. Vous pouvez utiliser la forme simplifiée de la loi de Fourier $j = \kappa\Delta T/\Delta r$, où ΔT est la différence de température caractéristique observée sur l'échelle de longueur typique du problème Δr.

Données : La masse volumique de l'œuf : $\mu = 103\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

La capacité thermique massique de l'œuf : $C = 4.2\mathrm{J\,K^{-1}\,g^{-1}}$

Rayon de l'œuf : $R = 2.5\mathrm{cm}$

La température de coagulation de l'albumen (protéine de l'œuf) : $T_c = 65°C$.

Le coefficient de transport thermique : $\kappa = 0.64\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-1}}$ (en admettant qu'il est le même pour l'albumen liquide et solide).

5 Problème

L'exercice suivant est un problème complet issu du test de présélection français de 2025. Il nécessite la maîtrise du cours sur les ondes et du cours de thermodynamique et peut être utilisé comme problème de révision de ces deux chapitres.

Problème : Le thermophone à tube à essai (adapté du test de présélection des IPhO 2025)

Dans tout l'exercice, on utilise la notation $\frac{\partial}{\partial y}$ pour indiquer qu'on dérive une fonction qui dépend de plusieurs variables par rapport à y en laissant fixes les autres variables.

Dans ce problème, on sera également amené à utiliser la deuxième loi de Newton (aussi appelée principe fondamental de la dynamique (PFD)). Cette loi, au programme de terminale, sera décrite lors du cours de mécanique 1. La masse d'un objet multipliée par l'accélération de son centre de masse est égale à la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur le corps.

Introduction

La thermoacoustique est l'étude des phénomènes résultant de l'interaction entre un flux de chaleur et une onde acoustique. Bien que cette thématique de recherche soit peu connue du grand public, les manifestations de l'effet thermoacoustique sont en fait observées depuis longtemps. Les souffleurs de verre constatent par exemple depuis des siècles que leurs tubes produisent parfois de violents sifflements. Dans ce problème, on étudie la production d'un son musical grâce à l'effet thermoacoustique, par l'introduction d'une source de chaleur localisée dans un tuyau sonore. Le premier instrument de musique fonctionnant sur ce principe était un orgue à flammes construit par Kastner en 1873, qu'il appela « pyrophone ». Le pyrophone fut perfectionné dans les années 2000 par Jacques Rémus, musicien et plasticien, qui mit au point le « thermophone », dans lequel il remplaça les flammes par des résistances électriques chauffantes. Un thermophone est formé d'un tuyau en acier doux, verre ou aluminium, qui est ouvert au moins à l'une de ses extrémités pour rendre le son audible. À l'intérieur du tuyau, on place un stack solide (empilement de plaques ou grilles métalliques, ou réseau de canaux rectangulaires en céramique), et on le chauffe. Lorsque la température de l'extrémité chaude devient suffisamment élevée, le thermophone se met à chanter . . . Il génère un son particulier, puissant et très pur spectralement.

1. Onde acoustique dans un tube à essai

Le tube à essai est assimilé à une enceinte cylindrique indéformable de longueur L= 14 cm, de section d'aire S et dont l'axe de symétrie est selon la direction de l'axe (Ox). L'extrémité fermée du tube est située à l'abscisse x = 0 et son extrémité ouverte à x = L. Au repos, c'est-à-dire en l'absence d'onde sonore, la température, la pression et la masse volumique de l'air dans le tube sont uniformes notées respectivement T_0, P_0 et ρ_0. Par ailleurs, on néglige tout effet de la pesanteur, ainsi que toutes les interactions visqueuses entre le gaz et les parois du tube de sorte que le mouvement du gaz se fait uniquement dans la direction x. Les propriétés du gaz peuvent alors être considérées uniformes dans les directions transverses y et z à tout instant. Pour décrire les vibrations de la colonne d'air dans le tube à essai, on la « découpe » en portions mésoscopiques qu'on appelle « particules de fluide ». Le volume de ces particules est suffisamment grand par rapport à l'échelle microscopique pour qu'on puisse y définir une pression, une température et une masse volumique. Mais il est également suffisamment petit par rapport à l'échelle macroscopique pour pouvoir considérer que toutes ces grandeurs y sont uniformes.

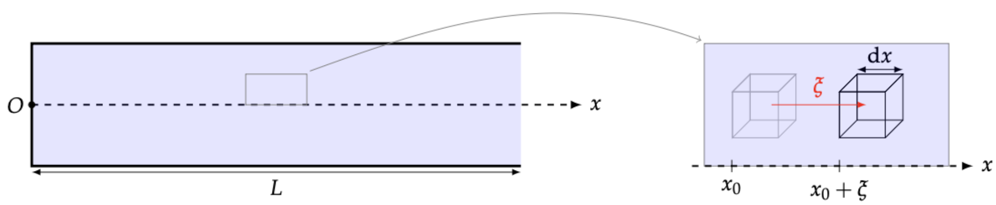


FIGURE 2 – Schéma de la situation à l'échelle macroscopique (à gauche) et à l'échelle mésoscopique (à droite)

Le système étudié à partir de maintenant est une particule de fluide dans le tube, d'épaisseur $dx \ll L$, de surface dS et de volume $dV = dxdS$. En l'absence de viscosité, cette particule est astreinte à se déplacer longitudinalement, sa position étant repéré par l'abscisse $x(t)$ de sa face gauche. Quand une onde stationnaire se forme dans le tube, la particule oscille autour de sa position d'équilibre notée x_0. Ainsi $x(t) = x_0 + \xi(x,t)$, avec $\xi(x,t)$ le « déplacement longitudinal » de la particule qu'on admet être de la forme $\xi(x,t) = \xi_m \sin(kx)\cos(\omega t)$, où ξ_m est l'amplitude des oscillations acoustiques, $\omega = 2\pi f$ la pulsation de l'onde et f sa fréquence, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ son nombre d'onde et λ sa longueur d'onde.

1. Rappeler la relation liant la célérité c d'une onde, sa fréquence f et sa longueur d'onde λ En déduire la relation liant ω et k.

La pression et la température locales s'écrivent :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t), \quad p(x,t) = -p_m \cos(kx)\cos(\omega t),$$

$$T(x,t) = T_0 + \tau(x,t), \quad \tau(x,t) = -\tau_m \cos(kx)\cos(\omega t),$$

et la masse volumique :

$$\rho(x,t) = \rho_0 - \varrho_m \cos(kx)\cos(\omega t).$$

On admet $\varrho_m/\rho_0 \ll p_m/P_0$ et $\varrho_m/\rho_0 \ll \tau_m/T_0$, donc $\rho \simeq \rho_0$.

On admet également :

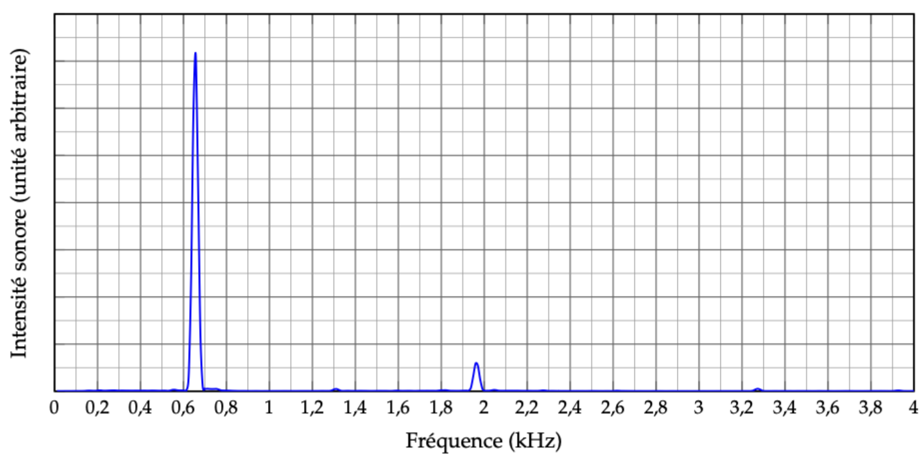
$$\tau_m = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{p_m}{P_0}T_0, \qquad \gamma = 1.4.$$

2. Exprimer les forces de pression exercées par les particules voisines situées juste à gauche et juste à droite.
3. Exploiter la seconde loi de Newton pour en déduire, $dm = \rho_0 dV$:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

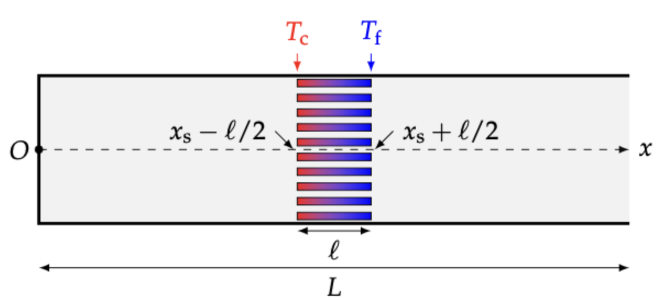
4. Exprimer p_m en fonction de c, ω, ρ_0 et ξ_m.
5. En supposant la surpression acoustique nulle en $x = L$, montrer que :

$$k = (2n+1)\frac{\pi}{2L}.$$



6. Analyser le spectre en fréquences fourni.
7. Montrer, à partir des réponses aux questions 1 et 6, que la fréquence du son produit par le thermophone de la vidéo introductive correspond au mode propre fondamental de vibration du tube. On donne la valeur de la célérité du son dans l'air à une température de $20°C$, sous pression atmosphérique : $c = 340 m.s{-}1$. Commenter l'écart éventuellement constaté avec la mesure expérimentale.

2. Condition d'amplification thermoacoustique



Un stack de longueur ℓ est centré en $x_s = L/2$. Ses extrémités sont à :

$$T_c = T_0 + \frac{\Delta T_s}{2}, \qquad T_f = T_0 - \frac{\Delta T_s}{2}.$$

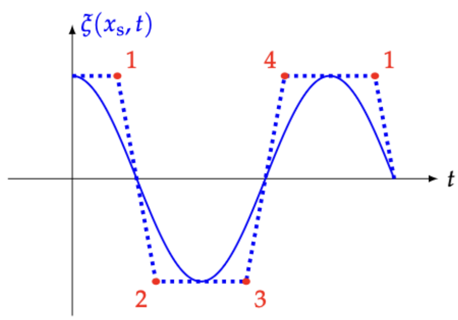
La température du stack est :

$$T_s(x) = T_0 + \frac{\Delta T_s}{\ell}(x_s - x) = T_0 + \nabla T_s (x_s - x), \qquad \nabla T_s = \frac{\Delta T_s}{\ell}.$$

Au centre ($x_0 = x_s$), la particule oscille :

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin(k x_s)\cos(\omega t), \qquad k x_s = \frac{\pi}{4}.$$

Pour simplifier la modélisation qui suit, le mouvement sinusoïdal de la particule est désormais décomposé en une phase de mouvement rapide $1 \to 2$, une phase d'arrêt $2 \to 3$, une nouvelle phase de mouvement rapide en sens inverse $3 \to 4$ et une dernière phase d'arrêt $4 \to 1$. Cette séquence « articulée » de mouvements est représentée ci-dessous.



8. Déterminer les positions x_{41} et x_{23}.
9. En déduire $T_{s,41}$ et $T_{s,23}$ de façon approchée.

Quand la particule de fluide se déplace rapidement le long du stack, elle n'a pas le temps d'échanger une quantité significative de chaleur avec la plaque. Sa température à l'issue des phases de mouvement $1 \to 2$ et $3 \to 4$ est donc celle associée à l'onde acoustique.

$$T(x,t) = T(x_s,t) = T_0 + \tau(x_s,t) = T_0 - \tau_m \cos(k x_s)\cos(\omega t)$$

avec $k x_s = \frac{\pi}{4}$.

10. Déterminer les températures T_2 et T_4 de la particule à la fin des phases de mouvement $1 \to 2$ et $3 \to 4$ en fonction de T_0, ∇T_s et τ_m.

Pour que la particule fournisse effectivement un travail au fluide environnant et participe, avec toutes les autres particules dans le stack, à amplifier puis entretenir l'onde stationnaire dans le tube, il faut qu'elle reçoive (respectivement qu'elle cède) de la chaleur du stack depuis le point de température la plus élevée (respectivement la moins élevée) de son mouvement.

11. Montrer alors qu'il y a conversion d'énergie thermique en travail acoustique à condition que le gradient de température du stack soit suffisamment grand.